SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Angelo Cavallucci

INCLUSIONI DIFFERENZIALI DIPENDENTI DA UNA MISURA

28 maggio 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. Vengono esposti alcuni risultati recenti per una classe di inclusioni differenziali dipendenti da una misura e con traiettorie a variazione limitata.

Abstract . We present some recent results for a class of differential inclusions depending on a measure and whose state trajectories are functions of bounded variation.

INCLUSIONI DIFFERENZIALI DIPENDENTI DA UNA MISURA

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il problema

$$(1) \qquad \begin{cases} dx(t) \in F_1(t, x(t))\, dt \; + \; F_2(t, x(t))\, \mu(dt)\, , 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

ove μ é una misura non negativa finita sui sottoinsiemi boreliani dell'intervallo $[0,1]$ e l'incognita $x(.)$ é una funzione a variazione limitata.

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati dovuti a Silva e Vinter [10],[11] e a Dal Maso e Rampazzo [4] nel caso in cui F_1 e F_2 sono funzioni ordinarie.

Supponiamo che le multifunzioni F_1 e F_2 verifichino le condizioni seguenti

(H1) $[0,1] \times R^n \ni (t,x) \to F_i(t,x) \neq \emptyset$ chiuso $\subset R^n$ $(i = 1,2)$;

(H2) F_1 é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ misurabile e F_2 é boreliana,

essendo $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ la σ -algebra prodotto dei sottoinsiemi di $[0,1]$ misurabili secondo Lebesgue per i Boreliani di R^n .

Indichiamo con $BV^+(0,1;R^n)$ lo spazio delle funzioni $x : [0,1] \longrightarrow R^n$ a variazione limitata tali che

$$x(t+) = \lim_{t' \longrightarrow t+} x(t') = x(t) \quad \text{per } 0 < t < 1;$$

indichiamo con dx la misura regolare di Borel associata alla funzione $x(.)$ dalla formula

$$\int_{[0,1]} \phi\, dx = \phi(1)x(1) - \phi(0)x(0) - \int_0^1 \dot{\phi}(t)x(t)\, dt, \quad \phi \in C^1([0,1]; R^n),$$

e poniamo, per $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$V_a^b(x) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| | a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}.$$

Veniamo ora alla *definizione di soluzione* del problema (1).

Lavoro svolto con il finanziamento dell'Universitá di Bologna. Finanziamento Speciale alle Strutture

Per $\alpha > 0, v \in R^n, 0 \leq t \leq 1$, poniamo

$$\tilde{F}_2(t, v; 0) = F_2(t, v),$$

$$\tilde{F}_2(t, v; \alpha) =$$

$$\{\frac{\xi(1) - \xi(0)}{\alpha} | \ \xi \in W_1^1(0, 1; R^n), \xi(0) = v, \dot{\xi}(s) \in \alpha F_2(t, \xi(s)) \quad q.d.su[0, 1]\}.$$

$W_1^1(0, 1; R^n)$ indica lo spazio delle funzioni assolutamente continue su $[0, 1]$.

Diremo, seguendo [10], che $x \in BV^+(0, 1; R^n)$ é *soluzione* del problema (1) se esistono le funzioni f_1 $\mathcal{L}$-integrabile ($\mathcal{L}$ = misura di Lebesgue) e f_2 μ-integrabile tali che

$$(2) \qquad \begin{cases} f_1(t) \in F_1(t, x(t)) \quad \mathcal{L} - q.d., \\ f_2(t) \in \tilde{F}_2(t, x(t-); \mu(\{t\}) \quad \mu - q.d., \\ x(t) - x(0) = \int_0^1 f_1(s)\, ds + \int\limits_{[0,t]} f_2(s)\mu(ds), \ 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Una motivazione per questa definizione é fornita dal Teorema 2. Per F_1 e F_2 a un sol valore la definizione data si trova in [4].

Questa definizione di soluzione permette di ricondurre lo studio del problema (1) a un problema del tipo

$$(1') \qquad \begin{cases} \dot{y}(s) \in F_1(\theta(s), y(s))\dot{\theta}(s) + F_2(\theta(s), y(s))\dot{\gamma}(s), \ 0 \leq s \leq 1 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

con $\theta(.)$ e $\gamma(.)$ assegnate funzioni *lipschitziane* e $y(.) \in W_1^1(0, 1; R^n)$. Per il problema (1') sono noti numerosi risultati di vario tipo (cfr. [1],[3],[6]).

Ricordiamo alcune definizioni (cfr. [10]). Indichiamo con $C^*(0, 1; R^n)$ la classe delle misure definite sui boreliani di [0,1] a valori in R^n; nel caso $n = 1$ scriveremo semplicemente $C^*(0, 1)$ e indicheremo con $C^+(0, 1)$ la classe delle misure a valori reali non negativi sui boreliani di [0,1]. Se $\mu_i, \mu \in C^*(0, 1; R^n)$, la scrittura

$$\mu_i \xrightarrow[i \to \infty]{w^*} \mu$$

significa che

$$\int\limits_{[0,1]} \phi \, d\mu_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \int\limits_{[0,1]} \phi \, d\mu, \ \forall \phi \in C(0, 1; R^n).$$

Se $R^n \supset A$ chiuso e $x \in A$, poniamo

$$N_A(x) = \{p \in R^n | \ A \times R^n \ni (x_i, p_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} (x, p), \limsup_{A \ni y \to x_i} \frac{p_i(y - x_i)}{|y - x_i|} \leq 0 \ \text{ per } \ i \geq 1\}.$$

Se $f : R^n \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ é inferiormente semicontinua e $f(x) \in R$, poniamo

$$\partial f(x) = \{\xi \in R^n | \ (\xi, -1) \in N_{epi(f)}(x, f(x)\},$$

ove $epi(f) = \{(y,t) \in R^n \times R |\ t \geq f(y)\}$.

Veniamo ora alla definizione delle funzioni θ γ che intervengono in (1'). Seguendo [10], poniamo

$$M(t) = \begin{cases} \mu([0,t]) \text{ per } 0 < t \leq 1, \\ 0 \text{ per } t = 0, \end{cases}$$

$$N(t) = \frac{t + M(t)}{1 + M(1)} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1,$$

$$L = 1 + M(1),$$

$$\theta(s) = \sup\{t \in [0,1] |\ N(t) \leq s\},\ 0 \leq s \leq 1.$$

Elenchiamo nella Proposizione 1 le proprietá delle funzioni M, N, θ utili per il seguito.

Proposizione 1. *Se $\mu \in C^+(0,1)$, valgono le seguenti affermazioni*

i) $\mu(\{t\}) = M(t) - M(t-)$ *per* $0 < t \leq 1$, $\mu(\{0\}) = M(0+) - M(0)$;

ii) $M(t+) = M(t)$, $N(t+) = N(t)$ *per* $0 < t < 1$;

iii) si ha, con $N(0-) = N(0) = 0$ *e* $N(1+) = N(1) = 1$,

$$\begin{aligned} &\theta(N(t)) = t, \\ &N(t-) \leq s \Leftrightarrow t \leq \theta(s), \\ &N(t+) < s \Leftrightarrow t < \theta(s), \\ &N(t-) \leq s \leq N(t+) \Leftrightarrow \theta(s) = t, \\ &N(t+) < s \leq N(t'+) \Leftrightarrow t < \theta(s) \leq t', \\ &0 \leq \theta(s') - \theta(s) \leq L(s' - s) \ \text{ per } 0 \leq s \leq s' \leq 1; \end{aligned}$$

iv) si ha per ogni $A \in \mathcal{B}([0,1])$

$$\mu(A) = \int_{\theta^{-1}(A)} [L - \dot{\theta}(s)]\, ds$$

e, per ogni $0 \leq h$ *boreliana su [0,1],*

$$\int_{\theta^{-1}(A)} h(\theta(s))[L - \dot{\theta}(s)]\, ds = \int_A h(\tau)\mu(d\tau);$$

v) per ogni boreliano $A \subset [0,1]$ *e* $0 \leq g$ $\mathcal{L}$*-misurabile si ha*

$$\int_A g(\theta(s))\dot{\theta}(s)\, ds = \int_{\theta(A} g(t)\, dt;$$

vi) posto

$$\gamma(s) = Ls - \theta(s),\ 0 \leq s \leq 1,$$

γ é una funzione lipschitziana e si ha

$$\gamma(N(t)) = M(t) \ \ per \ \ 0 \leq t \leq 1;$$

vii) siano $\mu_i, \mu \in C^+(0,1)$ tali che

$$\mu_i \xrightarrow[i\to\infty]{w^*} \mu$$

e siano θ_i, θ le funzioni corrispondenti; allora si ha per $i \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
&M_i(t) \longrightarrow M(t) \ \ se\ \mu(\{t\}) = 0 \ oppure\ t \in \{0,1\},\\
&N_i(t) \longrightarrow N(t) \ \ se\ \mu(\{t\}) = 0 \ oppure\ t \in \{0,1\},\\
&\dot{\theta}_i(s) \longrightarrow \dot{\theta}(s) \ debolmente\ in\ \ L^1,\\
&\theta_i(s) \longrightarrow \theta(s) \ uniformemente\ su\ \ [0,1].
\end{aligned}$$

Le funzioni M, N, θ sono state utilizzate da vari autori ([2], [4], [7], [8], [10]). La dimostrazione della Proposizione 1 si puó trovare in [4] e [11]. Per i punti iv) e v) si veda anche [5].

Il legame fra i problemi (1) e (1') é dato dal seguente teorema (cfr. [2], [4], [7], [10], [11]).

Teorema 1. *Supponiamo verificate le condizioni (H1) e (H2).*

i) Se $x \in BV^+(0,1;R^n)$ é soluzione del problema (1), allora esiste $y \in W_1^1(0,1;R^n)$ tale che

$$\begin{aligned}
&a)\ \dot{y}(s) \in F_1(\theta(s), y(s))\dot{\theta}(s) + F_2(\theta(s), y(s))\dot{\gamma}(s) \ \ q.d.\ su\ ,\\
&b)\ y(0) = x_0,\\
&c)\ x(t) = y(N(t))\ per\ 0 \leq t \leq 1.
\end{aligned}$$

ii) Se $y \in W_1^1(0,1;R^n)$ verifica le condizioni a) e b), allora la funzione $x(.)$ definita da c) é soluzione del problema (1) e riesce inoltre

$$V_0^1(x) \leq V_0^1(y).$$

La dimostrazione si trova in [10]. Qui ci limitiamo a indicare la definizione di una funzione y(.) come richiesto nel punti i).

Sia

$$1 \leq i \xrightarrow[1-1]{su} t_i \in \{t \in [0,1] |\ \mu(\{t\}) > 0\},$$

$$\theta_{-1}(t_i) = [s'_i, s"_i].$$

Se $f_1, f_2, \tilde{F}_2$ sono come nella definizione della soluzione x(.), per ogni i esiste $\xi_i \in W_1^1(0,1;R^n)$ tale che

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_i(s) \in \mu(\{t_i\})F_2(t_i, \xi_i(s)) \ \ \text{q.d.}\ ,\\
&\xi_i(0) = x(t_i-) \ \ \ [x(0-) := x(0)],\\
&\mu(\{t_i\})f_2(t_i) = \xi_i(1) - \xi_i(0).
\end{aligned}$$

Poniamo

$$y(s) = \begin{cases} x(\theta(s)) \text{ se } \theta(s) \neq t_i, \forall i \geq 1, \\ \xi_i \left(\frac{s - s'_i}{s''_i - s'_i} \right) \text{ se } \theta(s) = t_i, i \geq 1. \end{cases}$$

In [10] si verifica che questa y(.) soddisfa le richieste del punto i).

Il teorema seguente serve a motivare la definizione data di soluzione del problema (1).

Teorema 2. *Supponiamo che $F_1, F_1^{(i)}, F_2$ verifichino, per $i \geq 1$, le condizioni*

a) $F_1(t,.), F_1^{(i)}(t,.)$ hanno valori compatti non vuoti in R^n e grafico chiuso;

b) $F_1, F_1^{(i)}$ sono $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ misurabili;

c) $F_1(t,x)$ é convesso per ogni $(t,x) \in [0,1] \times R^n$;

d) F_2 ha grafico chiuso e valori convessi;

e) $\mathcal{L}(\{t \in [0,1] | \ F_1^{(i)}(t,x) = F_1(t,x)$ per ogni $x \in R^n\}) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Supponiamo dati inoltre $x_0^{(i)} \in R^n, \mu_i, \mu \in C^+(0,1), x_i \in BV^+(0,1;R^n)$ soluzioni dei problemi corrispondenti tali che, per $i \longrightarrow \infty$,

$$x_0^{(i)} \longrightarrow x_0,$$
$$\mu_i \xrightarrow{w^*} \mu,$$

esistono $0 \leq \beta \in L^1$ e $c > 0$ tali che

$$F_1^{(i)}(t, x_i(t)) \in \beta(t)B \quad q.d. \text{ su } [0,1],$$
$$F_2(t, x_i(t)) \in \beta(t)B \quad \text{per ogni } t,$$

con $B = \{x| \ |x| \leq 1\}$.

Allora esistono $y, y_i \in W_1^1$, soluzioni del problema (1') con i rispettivi dati e tali che

$$x_i(t) = y_i(N_i(t)) \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1, i \geq 1.$$

Posto

$$x(t) = y(N(t)), 0 \leq t \leq 1,$$

si ha inoltre, eventualmente per una sottosuccessione,

$$\dot{y}_i \longrightarrow \dot{y} \quad \text{debolmente in } L^1,$$
$$\dot{y}_i \longrightarrow \dot{y} \quad \text{se } \mu(\{t\}) = 0 \quad \text{oppure } t \in \{0,1\},$$
$$dx_i \xrightarrow{w^*} dx,$$
$$x_i(t) \longrightarrow x(t) \quad \text{debolmente su } [0,1],$$

e $x(.)$ é soluzione del problema (1).

Per la dimostrazione rimandiamo a [10].

Vari risultati di convergenza, per funzioni $F_1, F_1^{(i)}, F_2$ a un sol valore e piú regolari, si trovano in [2], (4), [7].

In [10] é contenuto anche il seguente teorema di esistenza

Teorema 3. *Supponiamo che F_1 e F_2 verifichino le condizioni (H1), (H2) e le seguenti*

a) F_1 e F_2 hanno valori convessi;

b) esiste $0 \leq c_1 \in L^1(0,1)$ tale che

$$F_1(t,x) \subset c_1(t)(1+|x|)B,$$
$$F_1(t,x) \subset F_1(t,y) + c_1(t)|x-y|B;$$

c) esiste la costante $c \geq 0$ tale che

$$F_2(t,x) \subset c(1+|x|)B,$$
$$F_2(t,x) \subset F_2(t,y) + c|x-y|B.$$

Allora, per ogni $\mu \in C^+(0,1)$ e $x_0 \in R^n$, esiste una soluzione del problema (1).

Consideriamo ora il problema

$$(3) \qquad \begin{cases} h(x(0),x(1)) \longrightarrow \min \\ dx(t) = f_1(t,x(t),u(t))\,dt + f_2(t,x(t))\mu(dt), 0 \leq t \leq 1, \\ u(t) \in U(t)\ \mathcal{L}-q.d.,\ u(.)\ \mathcal{L}-mis,\ \mu \in C^+(0,1), \\ (x(0),x(1)) \in C, \\ x \in BV^+(0,1;R^n), \end{cases}$$

per il quale facciamo le ipotesi

(H3) h é localmente lipschitziana su $R^n \times R^n$;

(H4) $f_1(.,x,.)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ misurabile ed esiste $0 \leq c_1 \in L^1(0,1)$ tale che

$$|f_1(t,x,u) - f_1(t,x',u)| \leq c_1(t)|x-x'|;$$

(H5) f_2 é continua ed esiste $c_2 \geq 0$ tale che

$$|f_2(t,x) - f_2(t,x')| \leq c_2|x-x'|;$$

(H6) U é un boreliano in $[0,1] \times R^n$;

(H7) C é chiuso in $R^n \times R^n$.

In [11] é ottenuta una versione del Principio di Massimo per il problema (3), come corollario di un analogo risultato dato dal seguente teorema

Teorema 4. *Sia $(z(.),v(.),\nu(.))$ una soluzione del sistema*

$$(3) \qquad \begin{cases} dx(t) = f_1(t,x(t),u(t))\,dt + f_2(t,x(t))\mu(dt), 0 \leq t \leq 1, \\ u(t) \in U(t)\ \mathcal{L}-q.d.,\ u(.)\ \mathcal{L}-mis,\ \mu \in C^+(0,1), \\ x(0) \in D, \\ x \in BV^+(0,1;R^n) \end{cases}$$

tale che

$$\psi(z(1)) \in \text{ frontiera di } \psi(R(D))),$$

ove

$$R(D) = \{x(1)|\ x(.) = \ \textit{soluzione di}\ \ (3')\}$$

e $\psi : R^n \longrightarrow R^k$ *é una assegnata funzione localmente lipschitziana e* D *é chiuso in* R^n.

Supponiamo soddisfatte le condizioni (H4)-(H6). Allora esistono $d \in R^k$ *con* $|d| = 1$ *e* $p(.) \in BV^+(0,1;R^n)$ *tali che* $(z(.), p(.))$ *é soluzione del sistema*[1]

a)

$$d\begin{bmatrix} z(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} f_1(t, z(t), v(t)) \\ -p(t) \cdot co\,\partial_x f_1(t, z(t), v(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} f_2(t, z(t)) \\ -p(t) \cdot \overline{\partial_x f_2}(t, z(t)) \end{bmatrix} \nu(t), 0 \le t \le 1,$$

e verifica le condizioni

b) $$p(0) \in N_D(z(0)), \quad -p(1) \in d.\partial\psi(z(1));$$

c) $$p(t) \cdot f_1(t, z(t), v(t)) = \max_{u \in U(t)} p(t) \cdot f_1(t, z(t), u)\ \mathcal{L} - q.d.;$$

d) $$p(t) \cdot f_2(t, z(t)) \ge 0\ \mu - q.d., \quad p(t) \cdot f_2(t, z(t)) \le 0 \ \ \textit{per ogni}\ \ t;$$

e) se $\nu(\{t\}) > 0$, *esiste una soluzione* $(\xi_t, \alpha_t) \in W_1^1$ *del sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_t(s) \\ \dot{\alpha}_t(s) \end{bmatrix} \in \nu(\{t\}) \begin{bmatrix} f_2(t, \xi_t(s)) \\ -\alpha(s) \cdot \overline{\partial_x f_2}(t, \xi_t(s)) \end{bmatrix}, 0 \le s \le 1,$$

$$\begin{bmatrix} \xi_t(0) \\ \alpha_t(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t-) \\ p(t-) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \xi_t(1) \\ \alpha_t(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ p(t) \end{bmatrix},$$

$$\alpha(s) \cdot f_2(t, \xi(s)) \ge 0 \ \ \textit{per ogni}\ \ s,$$

ove , nel caso $t = 0$, *si conviene di porre* $(z(t-), p(t-)) = (z(0), p(0))$ *e* $(z(t), p(t)) = (z(0+), p(0+))$.

Indichiamo brevemente i punti fondamentali della dimostrazione, contenuta in [11].

I) Il caso generale viene ricondotto al caso in cui sono soddisfatte le condizioni

$$|f_1(t, x, u)| \le \alpha_1(t)|x| + \alpha_2(t) \ \ \text{per}\ \ u \in U(t),$$

$$|f_2(t, x)| \le \beta_1|x| + \beta_2,$$

per certe costanti non negative β_1 e β_2 e certe funzioni non negative $\alpha_1, \alpha_2 \in L^1(0,1)$.

[1]Per definizione si ha $\overline{\partial_x f_2}(t,x) = \{\lim_{i \to \infty} a_i |\ a_i \in co\,\partial f_2(t_i, x_i), \quad (t_i, x_i) \longrightarrow (t, x)\}$

II) Si fissano le successioni

$$\psi(R(D)) \not\ni \xi_j \longrightarrow \psi(z(1)),$$

$$0 \leq m_j(.) \in L^\infty(0,1),$$

$$m_j(t)\,dt \xrightarrow{w^*} \nu(dt)$$

Oserviamo che una possibile scelta di $m_j(.)$ si puó ottenere come nella dimostrazione del Teorema 5.3 di [4].

Le condizioni del punto I) rendono applicabili il Teorema 1 e il Teorema 2 per ottenere la successione $x_j(.) \in W_1^1(0,1;R^n)$ tale che

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_j(t) = f_1(t, x_j(t), v(t)) + f_2(t, x_j(t))m_j(t), 0 \leq t \leq 1,\\
&x_j(0) = z(0),\\
&x_j(t) \longrightarrow z(t) \ \text{ se } \ t \in \{0,1\} \ \text{ oppure } \ \nu(\{t\}) = 0,\\
&dx_j \xrightarrow{w^*} dz.
\end{aligned}$$

III) Si pone

$$\begin{aligned}
&\epsilon_j = |\xi_j - \psi(x_j(1))|^{\frac{1}{2}},\\
&r_j = j + ||m_j||_\infty,\\
&W_j = \{(a, u(.), m(.))|\ a \in D,\ u(.) \text{ e } m(.) \text{ misurabili },\\
&\qquad (u(t), m(t)) \in U(t) \times [0, r_j]\ \mathcal{L} - q.d.\},\\
&d[(a, u(.), m(.)), (a', u'(.), m'(.))] = |a - a'| + \mathcal{L}(\{t \in [0,1]|\ u(t) \neq u'(t)\}) +\\
&\qquad \int_0^1 |m(t) - m(t')|\,dt,\\
&\Phi_j(a, u, m) = |\xi_j - \psi(y(1))|, .
\end{aligned}$$

ove $y(.) \in W_1^1(0,1;R^n)$ é la soluzione del problema

$$(i) \qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = f_1(t, y(t), u(t)) + f_2(t, y(t))m(t), 0 \leq t \leq 1,\\ y(0) = z(0). \end{cases}$$

Si dimostra che W_j é completo rispetto alla distanza d e Φ_j é continua su W_j. Inoltre si ha

$$\Phi_j(z(0), v, m_j) - \epsilon_j^2 = 0 \leq \Phi_j(a, u, m),\ \forall (a, u, m).$$

Ora si puó applicare il principio variazionale di Ekeland (cfr. [3]) e ottenere $(a_j, u_j, \tilde{m}_j) \in W_j)$ tale che

$$\Phi_j(a_j, u_j, \tilde{m}_j) \leq \Phi_j(a, u, m) + \epsilon_j d[(a_j, u_j, \tilde{m}_j), (a, u, m)] \ \text{ per ogni } \ (a, u, m) \in W_j,$$

$$d[(z(0), v, m_j), (a_j, u_j, \tilde{m}_j)] \leq \epsilon_j.$$

Detta $\tilde{x}_j(.)$ la soluzione del problema (i) relativa a $a_j, u_j, \tilde{m}_j$, si ha

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_j(0) = a_j \longrightarrow z(0),\\
&\mathcal{L}(\{t \in [0,1] |\ u_j(t) \neq v(t)\}) \to 0,\\
&m_j(t)\,dt \xrightarrow{w^*} \nu(dt)
\end{aligned}$$

e inoltre la terna $(\tilde{x}_j(.), u_j(.), \tilde{m}_j(.))$ é soluzione del problema

$$(ii)\qquad \begin{cases}
|\xi_j - \psi(x(1))| + \epsilon_j\{|x(0) - \tilde{x}_j(0)| + \\
+ \displaystyle\int_0^1 [\chi_j(t, u(t)) + |\tilde{m}_j(t) - m(t)|]\,dt\} \to \quad \min \\
\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t)) + f_2(t, x(t))m(t)\ \mathcal{L} - \text{ q.d.} \\
(u(t), m(t)) \in U(t) \times [0, r_j]\ \mathcal{L} - \text{ q.d.} \\
x(0) \in D \\
m(.),\ u(.),\ \text{ mis. } , x(.) \in W_1^1(0,1; R^n
\end{cases}$$

ove

$$\chi_j(t,u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u = u_j(t) \\ 1 & \text{se } u \neq u_j(t) \end{cases}$$

IV) Al problema (ii) si applica il principio di massimo classico (cfr. [3], [9]) e si ottengono $d_j \in R^k$, $p_j(.) \in W_1^1(0,1; R^n)$ tali che

$$\begin{aligned}
&|d_j| = 1,\\
&-\dot{p}_j(t) \in p_j(t) \cdot co\,\partial_x f_1(t, \tilde{x}_j(t), u_j(t)) + \\
&\qquad + p_j(t) \cdot co\,\partial_x f_2(t, \tilde{x}_j(t))\tilde{m}_j(t) \text{ q.d. su } [0,1],\\
&p_j(0) \in N_D(\tilde{x}_j(0)) + \epsilon_j \partial_x |x - z(0)|_{x=\tilde{x}_j(0)},\\
&-p_j(1) \in d_j \cdot \partial\psi(\tilde{x}_j(1)),\\
&H_j(t, u_j(t), \tilde{m}_j(t)) = \max\{H_j(t,u,m) |\ u \in U(t),\ 0 \leq m \leq r_j\} \text{ q.d.},
\end{aligned}$$

con H_j definita da

$$H_j(t,u,m) = p_j(t) \cdot f_1(t, \tilde{x}_j(t), u(t)) + p_j(t) \cdot f_2(t, \tilde{x}_j(t))m - \epsilon_j(|m - \tilde{m}_j(t)| + \chi_j(t,u)).$$

Corollario. *Sotto le ipotesi (H3)-(H7), sia (z, v, ν) soluzione del problema (3). Allora esistono $\lambda > 0$, $p(.) \in BV^+(0,1; R^N)$ tali che $\lambda + |p(t)| > 0$ per ogni t, valgono le affermazioni a), c), d), e) del Teorema 3 e la seguente*

$$b')\qquad (p(0), p(1)) \in N_C(z(0), z(1)) + \lambda\partial h(z(0), z(1))$$

BIBLIOGRAFIA

1. J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. A. Bressan, F. Rampazzo, *On differential systems with vector-valued impulsive controls*, Boll. UMI (7) **2-B** (1988), 641–56.
3. F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
4. G. Dal Maso, F. Rampazzo, *On systems of ordinary differential equations with measures as controls*, Diff. Integr. Eq. **4** (1991), 739–65.
5. C. Evans, R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRP Press, 1992.
6. P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis*, CRM Proc.Lecture Notes, AMS, Providence, RI, 1993.
7. J. P. Raymond, *Optimal control problems in spaces of functions of bounded variation*, Diff. Integr. Eq. **10, 1** (1997), 105–36.
8. R. W. Rishel, *An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures*, SIAM J. Contr.Optim. **3** (1965), 191–205.
9. J. D. Rowland, R. B. Vinter, *Dynamic optimization for problems with free time and active state constraints*, SIAM J. Contr.Optim. **31** (1993), 677–97.
10. G. N. Silva, R. B. Vinter, *Measure driven differential inclusions*, J. Math. An. Appl. **202** (1996), 727–46.
11. G. N. Silva, R. B. Vinter, *Necessary conditions for optimal impulsive control problems*, SIAM J. Contr.Optim. **35, 6** (1997), 1829–46.
12. R. B. Vinter, G. Pappas, *A maximum principle for nonsmooth optimal control problems with state constraints*, J. Math. An. Appl. **89** (1982), 212–32.
13. R. B. Vinter, F. M. L. Pereira, *A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories*, SIAM J. Contr.Optim. **26** (1988), 205–29.